

Aplicação do pré-condicionador *Multigrid* Algébrico baseado em *Wavelet* no cálculo de campos magnéticos não lineares

Solution of nonlinear magnetic field problems by Krylov-subspace methods with η -cycle wavelet based algebraic multigrid preconditioning

Fabio Henrique Pereira

Programa de Mestrado em Engenharia de Produção da
Universidade Nove de Julho – Uninove,
São Paulo – SP [Brasil]
fabiohp@uninove.br

Silvio Ikuyo Nabeta

Departamento de Engenharia de Energia e Automação
Elétricas da Escola Politécnica Da Universidade De São Paulo
– PEA/EPUSP,
São Paulo – SP [Brasil]
nabeta@pea.usp.br

Este trabalho investiga o desempenho de diferentes η -ciclos do método Multigrid Algébrico baseado em Wavelet (WAMG) como pré-condicionador dos métodos iterativos clássicos Bi-Gradiente Conjugado Estabilizado (BiCGStab) e Mínimo Resíduo Generalizado (GMRES) e Gradiente Conjugado (CG) na solução de sistemas de equações algébricas não lineares oriundos da análise de um motor de relutância chaveado composto pelo material ferromagnético aço S45C com curva de magnetização não linear, associado ao método de Newton-Raphson. Diversas configurações de métodos iterativos e pré-condicionadores serão utilizadas, dando especial atenção ao comportamento de convergência das diferentes técnicas, bem como aos tempos de processamento em cada caso. As técnicas de pré-condicionamento tradicionais, baseados nas decomposições incompletas de Cholesky e LU, serão utilizadas para fins de comparação dos resultados.

Palavras-chave: Campos Magnéticos. Método dos Elementos Finitos. Métodos no Subespaço de Krylov. *Multigrid* Algébrico baseado em Wavelet. Pré-condicionadores.

In this work the performance of η -cycle wavelet-based algebraic multigrid preconditioner for iterative methods is investigated. The method is applied as a preconditioner for the classical iterative methods Bi-Conjugate Gradient Stabilized (BiCGStab), Generalized Minimum Residual (GMRes) and Conjugate Gradient (CG) to the solution of non-linear system of algebraic equations from the analysis of a switched reluctance motor with ferromagnetic material the steel S45C and nonlinear magnetization curve, associated with the Newton-Raphson algorithm. Particular attention has been focused in both V- and W-cycle convergence factors, as well as the CPU time. Numerical results show the efficiency of the proposed techniques when compared with classical preconditioner, such as Incomplete Cholesky and Incomplete LU decomposition.

Key words: Finite Element Method. Krylov-subspace methods. Magnetic Field. Preconditioners. Wavelet-based Algebraic Multigrid.



1 Introdução

Problemas relacionados ao cálculo de campos magnéticos envolvendo materiais com propriedades não lineares têm sido superados com sucesso por meio de ferramentas numéricas, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Tais ferramentas são baseadas principalmente no método de Newton-Raphson (NR), que possui a propriedade de convergir quadraticamente próximo à solução. Nesse processo, cada iteração do método de NR requer a resolução de um sistema de equações lineares, o que é realizado, frequentemente, usando métodos iterativos não estacionários pré-condicionados com técnicas tradicionais de decomposição incompleta da matriz, tais como decomposição Incompleta de Cholesky (IC) e decomposição incompleta LU (ILU) (FUJIWARA et al., 2005), (KOH et al., 2006).

Este artigo propõe o uso de uma estratégia de pré-condicionamento baseada em η -ciclos do método Multigrid Algébrico baseado em Wavelet (WAMG), em vez das usuais técnicas IC e ILU. O método WAMG foi proposto recentemente em Pereira (2006) e têm apresentado resultados satisfatórios em dificuldades nas quais os métodos tradicionais encontram problemas de convergência (PEREIRA, 2007).

O desempenho do método WAMG é comparado com as técnicas IC e ILU no pré-condicionamento de sistemas lineares para os métodos iterativos dos Gradientes Conjugados (CG), Bi-Gradientes Conjugados Estabilizados (BiCGStab) e Mínimo Resíduo Generalizado (GMRes). Uma comparação entre as performances dos ciclos em V e W para o WAMG também é apresentada, focando principalmente o comportamento de convergência e o tempo de processamento das diferentes abordagens.

2 Formulação

O método dos elementos finitos utilizando a formulação de Galerkin fornece o embasamento para a análise de problemas magnetostáticos. A forma fraca para esse tipo de problema é apresentada em (1)

$$\int_{\Omega} \nabla N_l \nabla \frac{1}{\mu} A d\Omega = \oint_{\Gamma} N_l \nabla \frac{1}{\mu} A \cdot n d\Gamma + \iint_{\Omega} N_l J d\Omega \tag{1}$$

na qual A é o potencial vetor magnético, Ω é o domínio, Γ é sua fronteira (condições de contorno homogêneas são assumidas), J é a densidade de corrente injetada, μ a permeabilidade magnética e N_l é a função de forma, $l = 1, 2, 3$.

A n -ésima iteração do método de NR produz uma atualização do potencial vetor magnético A que pode ser representada da seguinte forma (FUJIWARA et al., 2005):

$$A^{n+1} = A^n + \Delta A^n \tag{2}$$

onde ΔA^n é a solução do sistema de equações algébricas lineares resultante da n -ésima iteração de NR:

$$P(A^n) \cdot \Delta A^n = -R(A^n) \tag{3}$$

Em (3) $R(A^n)$ é o resíduo obtido por meio da formulação de Galerkin para o método dos resíduos ponderados e $P(A^n)$ é a matriz jacobiana.

3 Precondicionador Multigrid Algébrico baseado em Wavelet

Métodos iterativos estacionários como Jacobi e Gauss-Seidel são eficientes em eliminar os componentes oscilatórios (altas frequências) do erro,

ao passo em que mantêm os componentes de baixa frequência praticamente inalterados. O método *multigrid* explora essa propriedade de suavização utilizando níveis com menor discretização para restabelecer a convergência do método estacionário após algumas iterações iniciais. Um erro formado por baixas frequências torna-se menos suave quando é projetado em um *grid* com menor discretização, o que melhora o fator de convergência do método estacionário.

O problema projetado no nível com menor discretização é resolvido utilizando-se o mesmo processo, de forma recursiva, e a equação residual (4) para obter uma aproximação para o erro \mathbf{e} , a partir de uma solução aproximada, a qual foi obtida pelo método estacionário no nível anterior.

$$P(A^n) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{r} = -R(A^n) - P(A^n) \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

Para realizar todos esses passos, os seguintes componentes elementares são necessários ao método *multigrid*:

- Operador de transferência entre os níveis – para as funções de restrição e interpolação dos vetores erro e resíduo;
- Hierarquia das matrizes – aproximação da matriz original em cada um dos níveis, e
- Método de suavização – método iterativo estacionário do tipo Jacobi que elimina os componentes de alta frequência do erro.

No caso algébrico os componentes elementares descritos acima são construídos com base apenas em informações obtidas da matriz original. Uma vez computados todos os componentes, uma família de esquemas η -ciclos do método *multigrid*, o qual é utilizado aqui como pré-condicionador para métodos iterativos, pode ser obtido para o sistema linear (3) como a seguir (o sobrescrito n foi omitido por simplicidade) (BRIGGS et al., 2000).

Esquema η -clicos

- Aplique ν_1 passos de relaxação em $P(A)^k \Delta A^k = -R(A)^k$ com uma estimativa inicial \mathbf{v}^k
- Se $\Omega^k =$ nível com menor discretização, então vá para o passo 4.

Senão

$$\begin{aligned} -R(A)^{k+1} &\leftarrow I_k^{k+1}(-R(A)^k - P(A)^k \mathbf{v}^k), \\ \mathbf{v}^{k+1} &\leftarrow 0, \\ \mathbf{v}^{k+1} &\leftarrow \eta\text{-ciclo}(\mathbf{v}^{k+1}, -R(A)^{k+1}) \eta^k \text{ vezes.} \end{aligned}$$

- Atualize a solução em Ω^k : $\mathbf{v}^k \leftarrow \mathbf{v}^k + I_{k+1}^k \mathbf{v}^{k+1}$.
- Aplique ν_2 passos de relaxação em $P(A)^k \Delta A^k = -R(A)^k$ com a estimativa inicial \mathbf{v}^k .

No esquema acima, Ω^k é o espaço gerado pelos vetores coluna da matriz no nível k do *multigrid*, Ω^{k+1} é um subespaço de Ω^k ($\Omega^{k+1} \subset \Omega^k$), $I_k^{k+1} = (I_{k+1}^k)^T : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ é o operador de transferência entre os níveis e ν_1, ν_2 que representam, respectivamente, o número de pré e pós passos do método de suavização. Para cada valor do índice η^k , tem-se um tipo diferente de ciclo para o *multigrid*. A principal diferença entre esses diferentes ciclos é o número de vezes em que o nível com menor discretização é visitado. A estrutura de alguns ciclos pode ser visualizada na Figura 1 para diferentes números de níveis e diferentes valores de η^k (TROTTEBERG et al., 2001). Usualmente, um mesmo valor de η^k , normalmente $\eta^k = 1$ ou $\eta^k = 2$, é utilizado em todos os níveis. Entretanto, é possível utilizar diferentes valores de η^k em cada nível k . Neste trabalho foram utilizados $\eta^k = 1$ e $\eta^k = 2$, que produzem os ciclos em V e em W, respectivamente, assim como uma combinação desses valores.

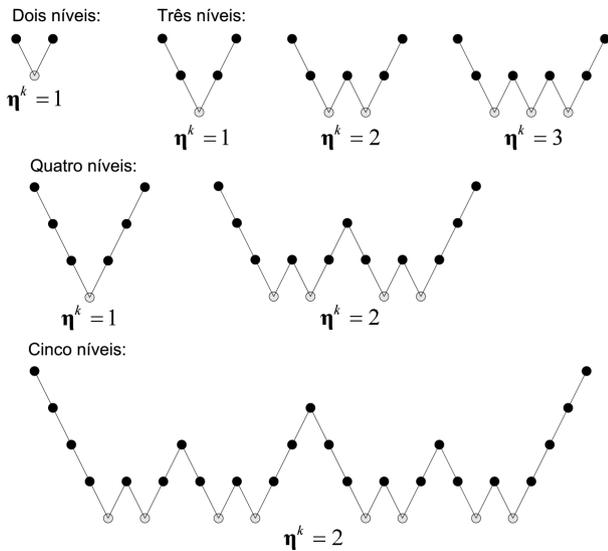


Figura 1: Estrutura dos ciclos de *multigrid* para diferentes números de níveis e diferentes valores de η^k (*suavização; ◦ solução exata; \ transferência (projeção em nível com menor discretização); / interpolação

Fonte: Os autores.

Na abordagem baseada em *wavelets* utilizada neste trabalho, a hierarquia de matrizes é constituída aplicando-se uma variação da transformada discretizada *wavelet* (do inglês DWT). Esta variação da DWT é aplicada de forma a se obter uma versão de baixa resolução (aproximação) da matriz original, que é utilizada no próximo nível do processo de multirresolução.

A DWT tradicional é frequentemente utilizada na análise de sinais e compressão de imagens (DAUBECHIES, 1992). A transformada pode ser entendida como uma aplicação de filtros de passa baixa (H) e passa alta (G), seguidos pela eliminação de uma entre cada duas amostras (subamostragem). Em cada nível da transformada unidimensional, dois conjuntos de dados são gerados: um conjunto d_k de coeficientes de detalhe (altas frequências) e c_k de coeficientes de aproximação (baixas frequências). Este procedimento é repetido sucessivamente como é mostrado na Figura 2. O símbolo $\downarrow 2$ representa a operação de subamostragem por 2. No caso bidimensional, passos suces-

sivos da transformada unidimensional são aplicados às linhas e colunas da matriz.

O método WAMG utiliza somente filtros passa baixa para obter uma aproximação para a matriz. Esta nova abordagem para o método *Multigrid* Algébrico foi proposta recentemente por Pereira (2006), o qual fornece mais detalhes do embasamento matemático do método.

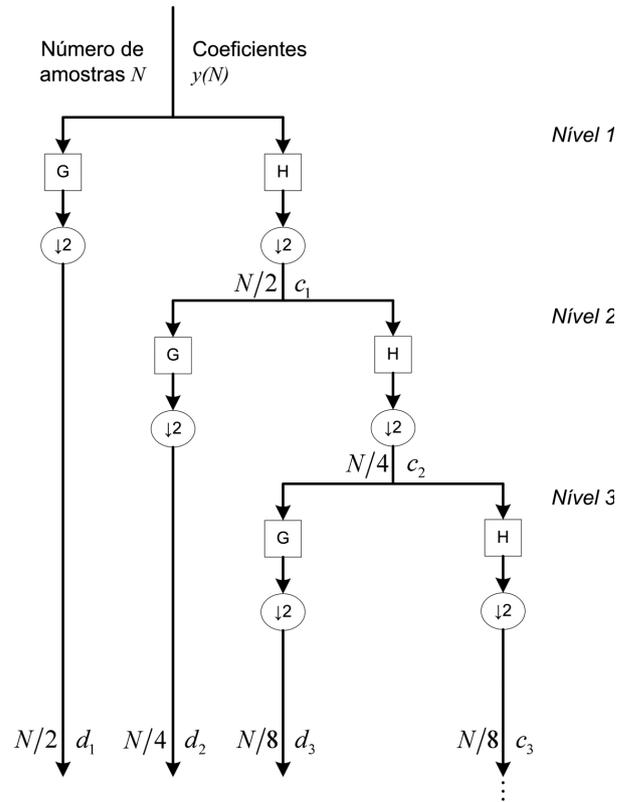


Figura 2: Transformada Discreta Wavelet unidimensional com três níveis de decomposição

Fonte: Os autores.

4 O fator de convergência empírico

Como foi mencionado anteriormente, este trabalho dedica atenção especial ao fator de convergência de diferentes membros da família de esquemas -ciclos do método multigrid. Portanto,

é útil determinar um fator de convergência empírico r . Como é usual, a norma Euclidiana do vetor resíduo é utilizada para a determinação de r da seguinte forma:

$$q^{(k)} = \frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(k-1)}\|_2} \tag{5}$$

ou ainda,

$$\hat{q}^{(k)} = \sqrt[k]{q^{(k)} \cdot q^{(k-1)} \dots q^{(1)}} = \sqrt[k]{\frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(0)}\|_2}} \tag{6}$$

Nas quais, $r^{(k)}$ é o vetor resíduo na k -ésima iteração e $r^{(0)} \neq 0$. De acordo com a literatura, tem-se que $\hat{q}^{(k)} \rightarrow \rho \cdot \hat{q}^{(k)}$ é uma boa estimativa para ρ se k é suficientemente grande (TROTTEBERG et al., 2001). Na seção de resultados numéricos, os valores de $q^{(k)}$ e $\hat{q}^{(k)}$ são apresentados para todos os métodos testados.

5 Caso teste

O método proposto foi aplicado na simulação de um motor de relutância chaveado, como mostrado na Figura 3. O material ferromagnético utilizado é o aço S45C (FUJIWARA et al., 2005), com permeabilidade magnética relativa $\mu = 1000$ e a curva de magnetização é apresentada na Figura 4.

Os dados dimensionais do motor de relutância chaveado são dados na Tabela 1. O modelo analítico apresentado em (Koh et al., 2006) foi utilizado para interpolar os dados experimentais, assim como a região de extrapolação da curva de magnetização do material utilizado. Os coeficientes do modelo analítico para curva B-H foram calculados utilizando o método dos mínimos quadrados.

Os parâmetros utilizados para o ajuste da curva são: $\mu_{0r} = 500$ (coeficiente de crescimento de

H), $\alpha = 0,5$ (ajuste do “joelho”) e $J_s = 2.0$ (campo de saturação).

A malha de elementos finitos é composta de 9920 elementos triangulares de primeira ordem e 5001 nós.

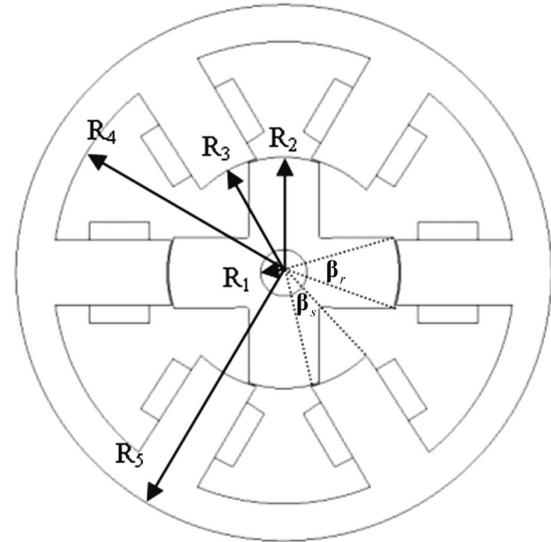


Figura 3: Parâmetros geométricos do motor de relutância chaveado

Fonte: Os autores.

Tabela 1: Dados dimensionais do motor

$R_1 = 5\text{mm}$	$\beta_r = 36^\circ$
$R_2 = 25\text{mm}$	$\beta_s = 32^\circ$
$R_3 = 25,25\text{mm}$	Espiras = 150
$R_4 = 50\text{mm}$	Entreferro = 0,25mm
$R_5 = 58\text{mm}$	Comprimento = 50mm

Fonte: Os autores.

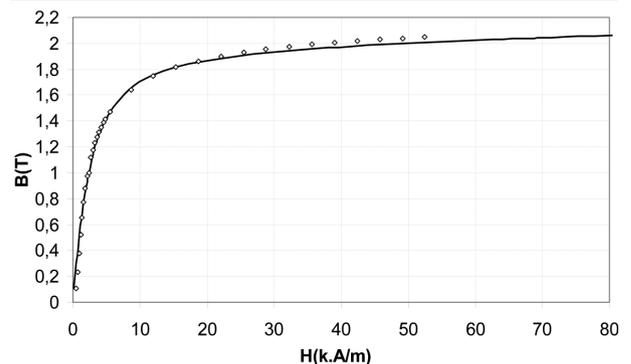


Figura 4: Curva de magnetização do aço S45C mostrando dados experimentais e a curva ajustada

Fonte: Os autores.



6 Resultados numéricos

Os sistemas lineares resultantes de cada iteração do método Newton-Raphson foram resolvidos utilizando-se diversas combinações dos métodos iterativos dos Gradientes Conjugados, Bi-Gradientes Conjugados Estabilizados, e Mínimo Resíduo Generalizado, com os pré-condicionadores WAMG, IC, ILU. Em todos os testes realizados, a convergência do método de Newton-Raphson é considerada ser atingida quando $\|\Delta A^n\|_2 / \|A^n\|_2 < 10^{-3}$. Para os sistemas lineares, o processo de resolução é interrompido quando a seguinte tolerância é satisfeita:

$$\|\mathbf{r}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2 < 10^{-5} \quad (7)$$

na qual \mathbf{b} é o vetor do lado direito do sistema de equações lineares que está sendo resolvido.

Uma comparação do número de iterações do método de Newton-Raphson para todos os métodos utilizados pode ser visualizada na Tabela 2. As Tabelas 3 e 4 apresentam uma comparação entre os ciclos em V e em W do método WAMG. A Tabela 3 mostra as estimativas $q^{(k)}$ e $\hat{q}^{(k)}$ para os fatores de convergência, e a Tabela 4 apresenta o número de iterações necessárias para atingir a convergência da solução, assim como o tempo de processamento. Estes resultados são relacionados às duas iterações iniciais do método de NR.

Tabela 2: Número de iterações de Newton-Raphson (tempo total de processamento em segundos)

Métodos iterativos com pré-condicionamento					
IC-CG	wamg (ciclo em V)			ILU	
	CG	BiCGStab	GMRes	BiCGStab	GMRes
5 (7.33)	2 (7.89)	2 (4.75)	2 (3.81)	2 (4.46)	2 (3.39)

Fonte: Os autores.

Tabela 3: Fatores de convergência estimados para o ciclo em V e ciclo em W do método WAMG

Fatores de convergência	Ciclo em V			Ciclo em W	
	CG	BiCGStab	GMRes	CG	BiCGStab
$q^{(m)}$	0.84	0.66	0.62	0.81	0.55
$\hat{q}^{(m)}$	0.92	0.75	0.77	0.87	0.71

Fonte: Os autores.

Tabela 4: Números de iterações e tempo de processamento (segundos) para os ciclos em V e W

Iterações de NR	Ciclo em V			Ciclo em W		
	CG	BiCGStab	GMRes	CG	BiCGStab	GMRes
Primeira	124 (6.29)	27 (2.65)	34 (1.86)	71 (15.38)	23 (9.52)	28 (6.05)
Segunda	5 (0.87)	4 (1.11)	5 (0.99)	5 (3.43)	32 (13.91)	30 (6.79)

Fonte: Os autores.

Assim como em abordagens tradicionais do método *multigrid* algébrico, os fatores de convergência dos ciclos em V são piores do que os do ciclo em W no método WAMG. Entretanto, a relação entre fator de convergência e o custo computacional favorece o uso do ciclo em V. De acordo com TROTTENBERG et al. (2001), uma boa alternativa para melhorar a taxa de convergência é utilizar um ciclo em V modificado (V_m). Nesse caso, em vez de usar $\eta^k=1$ em todos os níveis do multigrid, utiliza-se $\eta^k=1$ em alguns níveis e $\eta^k=2$ nos níveis restantes, ou seja, emprega-se uma combinação dos ciclos em V e em W. Essa abordagem foi utilizada neste trabalho como um pré-condicionador para o método BiCGStab na resolução do sistema linear resultante da primeira iteração do método de NR. Um gráfico da evolução da convergência para este caso é apresentado na Figura 5. No teste foi utilizado $\eta^k=2$ para o nível $k = 2$ e $\eta^k=1$ para todos os demais níveis. Como foi utilizado $\eta^k=2$ somente para um nível, consegue-se obter uma melhora no fator de convergência com um pequeno aumento do

custo computacional comparado ao ciclo em V. Como é usual, utilizou-se aqui a notação $V(v_1, v_2)$, $V_m(v_1, v_2)$ e $W(v_1, v_2)$ para indicar o tipo de ciclo e o número de pré e pós passos de suavização, sendo que V_m é o ciclo em V modificado, descrito anteriormente. Os valores correspondentes do fator de convergência $\hat{q}^{(m)}$, do tempo de processamento e do número de iterações N para esse caso teste são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5: BiCGStab pré-condicionado com diferentes ciclos do WAMG

	BiCGStab		
	Ciclo em V	Ciclo em W	Ciclo V_m
$\hat{q}^{(m)}$	0.75	0.71	0.72
N	27	23	26
Tempo (s)	2.65	9.25	3.20

Fonte: Os autores.

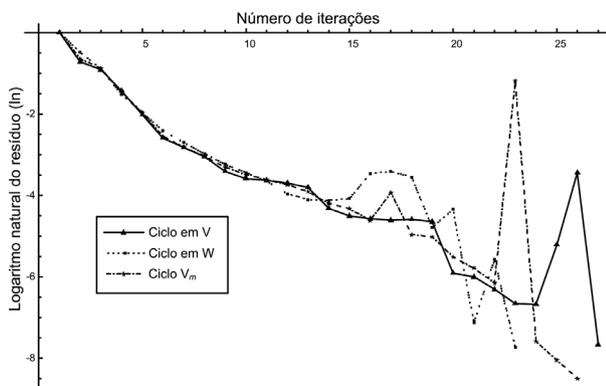


Figura 5: Evolução da convergência para os diferentes ciclos do WAMG

Fonte: Os autores.

A Tabela 6 mostra uma comparação entre o desempenho dos pré-condicionadores WAMG, ILU e IC. É apresentado na tabela o número de iterações N dos métodos iterativos para os sistemas lineares das duas primeiras iterações de NR, bem como o fator de convergência e tempo de processamento referente à segunda iteração de NR. O comportamento da convergência neste caso é apresentado na Figura 6, onde um ciclo WAMG $V(3,3)$ foi utilizado.

Tabela 6: Comparação entre o desempenho dos pré-condicionadores WAMG, ILU e IC

	ICCG	WAMG			ILU	
		CG	BiCGStab	GMRes	BiCGStab	GMRes
N (1ª iteração de NR)	141	124	27	34	87	96
N (2ª iteração de NR)	153	5	4	5	14	8
$\hat{q}^{(m)}$ (2ª iteração de NR)	0.94	0.33	0.18	0.32	0.71	0.44
Tempo de processamento (2ª iteração de NR)	1.17	0.87	1.11	0.99	0.80	0.36

Fonte: Os autores.

Em todos os testes, o método WAMG foi implementado utilizando *wavelets* de Daubechies de ordem 2 (DAUBECHIES, 1992).

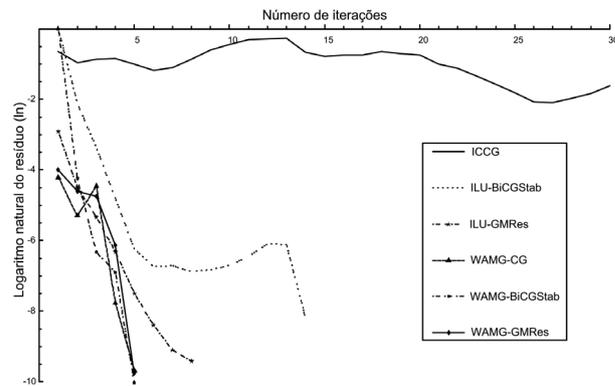


Figura 6: Evolução da convergência dos diferentes métodos: segunda iteração de NR

Fonte: Os autores.

7 Conclusão

Visando melhorar a taxa de convergência do método iterativo linear no processo Newton-Raphson, este trabalho propõe o uso de técnicas de pré-condicionamento baseadas em η -ciclos do método WAMG, combinados aos métodos iterativos do tipo gradientes conjugados e o mínimo resíduo generalizado.



Foi dada especial atenção aos fatores de convergência dos ciclos em V e em W. Os resultados numéricos mostram que os fatores de convergência para os ciclos em V do WAMG são piores do que para o ciclo em W, e que o uso de um ciclo em V modificado pode melhorar a taxa de convergência do método com um aumento aceitável do esforço computacional em comparação ao ciclo em V. Essa estratégia pode ser especialmente adequada em situações nas quais o uso do ciclo em V não produz resultados satisfatórios.

A comparação do WAMG com os métodos clássicos de pré-condicionamento, como decomposição incompleta de Cholesky e decomposição LU incompleta mostra a robustez da nova abordagem. Isso é especialmente útil em sistemas lineares envolvendo matrizes grandes e mal condicionadas. É importante também mencionar que apesar do desempenho deficiente do método ICCG, apresentado claramente na Figura 6, a matriz do sistema correspondente é simétrica positiva definida (*spd*). De fato, se a matriz não é *spd* a decomposição de Cholesky não existe.

A única desvantagem observada em relação ao desempenho do WAMG nos testes realizados, diz respeito ao tempo de processamento que se

apresenta maior do que o do pré-condicionador ILU. Contudo, este tempo pode ser reduzido otimizando-se a implementação computacional.

Referências

- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E; McCORMICK, S. F. A *Multigrid Tutorial*. 2ª ed. SIAM, 2000.
- DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- FUJIWARA, K.; OKAMOTO, Y.; KAMEARI, A; AHAGON, A. 2005. The Newton-Raphson method accelerated by using a line search. *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 41, n. 5, pp. 1724-1727.
- KOH, C. S.; RYU J. S.; FUJIWARA, K. Convergence acceleration of the Newton-Raphson method using successive quadratic function approximation of residual. *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 42, n. 4, pp. 611-614, 2006.
- PEREIRA, F. H.; VERARDI, S. L. L.; NABETA, S. I. A Wavelet-based Algebraic Multigrid preconditioner for sparse linear systems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 182, pp. 1098-1107, 2006.
- PEREIRA, F. H. et al. A Wavelet-based Algebraic Multigrid Preconditioning for Iterative Solvers in Finite Element Analysis. *IEEE Trans. on Magn.*, v. 43, n. 4, pp. 1553-1556, 2007.
- TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C. W.; SCHULLER, A. *Multigrid*. pp. 45-56. Academic Press, 2001.

Recebido em 27 maio 2009 / aprovado em 10 dez. 2009

Para referenciar este texto

PEREIRA, F. H.; NABETA, S. I. Aplicação do pré-condicionador *Multigrid* Algébrico baseado em *Wavelet* no cálculo de campos magnéticos não lineares. *Exacta*, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 173-180, 2009.